

Зп.1 $\begin{matrix} j=1 & 2 & 3 \\ i=1 & (1) & 2 & 3 \\ i=2 & 2 & 4 & (0) \end{matrix}$ $\begin{matrix} I=1 & i_0=1 \\ I=2 & j_0=1 \end{matrix}$

Зп.2 $\begin{matrix} 1 & 3 & 2 \\ 1 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 2 \end{matrix}$

$(i_0=3, j_0=1) - \text{с.м.} \Rightarrow I=\bar{I}=2$

Зп.3 $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 4 & (1) \\ 5 & (2) & 2 & 3 \\ 4 & (1) & 3 & 2 \end{pmatrix}$ Нет с.м.
 $\begin{matrix} I=2 & i_0=2 \\ \bar{I}=3 & j_0=2 \text{ или } 4 \end{matrix}$

См. нм. в. нм. бесконечен

Зп.4 $K(x, y) = 1 - (x - y)^2$, $x, y \in [0, 1]$ г-а нм.р. x, y -ком.

$w(x) = \min_{y \in [0, 1]} K(x, y) = \begin{cases} x \cdot (x-1)^2 & x \leq 1/2 \\ 1 - x^2 & x > 1/2 \end{cases} \begin{matrix} (y=1) \\ (y=0) \end{matrix}$

$\max_{x \in [0, 1]} w(x) = 3/4$ $\text{матем. } 1 - x^2 = 1 - (x-1)^2$

$x_0 = 1/2, I = 3/4$ - максим.

$\bar{w}(y) = \max_{x \in [0, 1]} K(x, y) = 1 \quad (x=y) \Rightarrow \text{в. оптимальна}$

$y_0 \in [0, 1], I = 1$
 $I < \bar{I} \Rightarrow \text{нет с.м.}$

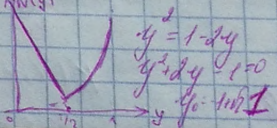
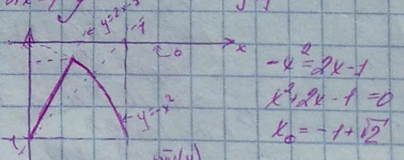
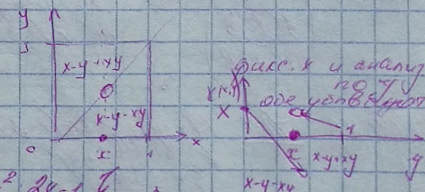
Зп.5 Бесконечное дуэль

$K(x, y) = \begin{cases} x - y, & x < y \\ 0, & x = y \\ x - y - xy, & x > y \end{cases}$

$\min_{y \in [0, 1]} w(x) = \min_{y \in [0, 1]} \begin{cases} x - y \\ x - y - xy \end{cases}$

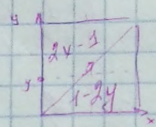
нм. нм.р. $\max_{x \in [0, 1]} w(x) = 2\sqrt{2} - 3$
 $x_0 = -1 + \sqrt{2}$

$\bar{w}(y) = \sup_{x \in [0, 1]} K(x, y) = \max_{x \in [0, 1]} \begin{cases} y^2, & 0 \leq x \leq y \\ x - y, & x > y \end{cases}$
 $\min_{y \in [0, 1]} \bar{w}(y) = 3 - 2\sqrt{2} = \bar{I} \quad y_0 = -1 + \sqrt{2}$

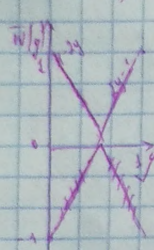


Зад 6. Найти экстремумы

$$K(x,y) = \begin{cases} 2x-1, & x < y \\ 0, & x = y \\ 1-2y, & x > y \end{cases}$$



2-й пере:



1-й пере:

$$W(y) = \sup_{x \in [0,1]} K(x,y) = \max\{y-1, 0, 1-2y\}$$

$$\min W(y) = 0 \quad y_0 = \frac{1}{2}$$

$$w(x) = \inf_{y \in [0,1]} K(x,y) = \min\{1-2x, 0, 2x-1\}$$

$$\max w(x) = 0 \quad x_0 = \frac{1}{2}$$

С.г. $(\frac{1}{2}, \frac{1}{2})$

Зад 7. $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 2 \\ 2 & 4 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ $(i_1=1, j_1=1)$ п.м. $\rightarrow (i_3=1, j_3=3)$

$(i_2=2, j_2=3)$ п.м. $(i_4=2, j_4=1)$

Зад 8. $\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 3 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}$ С.г. $(2,2)$ $i_1=2, j_1=2$ $K(2,2)=2$

но $K(3,3)=2$ не сюда з.!!

08.09.18 Зад 1. $K(x,y) = g(x) \cdot h(y) \cdot xy^2$, $x, y \in [0,1]$ - выпуклый симплекс

$K'_x = g'(x) \cdot h(y) \cdot y^2$

$K''_{xx} = g''(x) \cdot h(y) \cdot y^2 \leq 0 \Rightarrow K(x,y)$ - вогнутый по x

$K'_y = g(x) \cdot h'(y) \cdot 2xy$

$K''_{yy} = 2g(x) \cdot h''(y) \cdot x \geq 0 \Rightarrow K(x,y)$ - выпуклый по y

$\Rightarrow$ по Тх ФН $\Rightarrow$ Т-экстрем. точка

Р.м. $(x_0, 0)$

$K(x, 0) \leq K(x_0, 0) \leq K(x_0, y)$

Зад 2. $K(x,y) = 8(4xy^2 - 2x^2y)$, $x, y \in [0,1]$

спросим по x

спросим по y

Поставим анал. ур-е

$$K'_x = 8(4y^2 - 4x) = 0$$

$$K'_y = 8(8xy - 2x^2) = 0$$

$$\begin{cases} 8(4y^2 - 4x) \cdot y(y-1) = 0 \\ 8(8xy - 2x^2) \cdot y(y-1) = 0 \end{cases}$$

$$\left\{ \begin{matrix} (0,0) & (0,1) & (1,0) & (1,1) \\ (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}) & & & \end{matrix} \right\} = C$$

$$\begin{cases} x=0 \\ y=1 \\ y=0 \end{cases} \Rightarrow y = \frac{1}{8x} \Rightarrow y = \frac{1}{8} \Rightarrow x = \frac{1}{8}$$

$$x^c = \{0, \frac{1}{8}, 1\} \quad y^c = \{0, \frac{1}{8}, \frac{1}{2}, 1\}$$

$x \backslash y$	0	1/8	1/2	1
0	0	-1	-4	-8
1/8	-1	-1 1/8	-3	1
1	-8	-16	-12	8

$\Rightarrow$ п.м. $(\frac{1}{8}, \frac{1}{2})$

Зад 3. (Тх. Тх. и вл. по с.м. Т)

$$K(x,y) = x^2 y^2 \quad x, y \in [0,1]$$

не вогнут по x

не выпукла по y

$$K(1,1) = 1; K(1,0) = 0; K(0,1) = 0$$

$$K(x,1) \leq K(1,1) \leq K(1,y) \Rightarrow (1,1) - \text{п.м.}$$

Доказательство: $\min_x K(x,y) = K(x, g(x)) = w(x)$

$\exists \max_x w(x) = w(x^*)$

а у Тх ФН $\Rightarrow (x^*, y(x^*))$ - п.м.

Это суф. г. по Тх. ФН.

Зад 4. Гл.м. суп.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$Jp^* = (\frac{1}{2}, 0, \frac{1}{2}) \rightarrow \text{скал. на сд. } \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2} \quad \frac{1}{2}$$

$$q^* = (\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, 0) \rightarrow \frac{1}{2} \quad 0 \quad \frac{1}{2}$$

$V = \frac{1}{2}$

Через декомпозицию.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & 4 & 2 & 4 \\ -4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & 4 & 2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 - R_2} \begin{pmatrix} 0 & 2 & -2 & 4 \\ 3 & 2 & 4 & 0 \\ -4 & 2 & 4 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 8 \end{pmatrix}$$

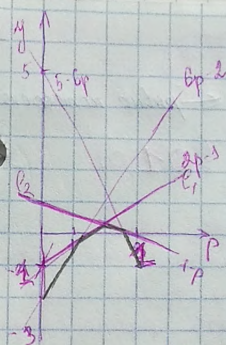
$$\begin{pmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 8 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$p^* = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \\ 0 & 0 & \frac{2}{3} & \frac{1}{3} \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_1 \leftrightarrow R_2} \begin{pmatrix} 0 & -1 \\ -1 & 1 \\ -4 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 10 & 5 & 1 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{R_2 - R_1} \begin{pmatrix} 1 & 5 & 4 & 0 \\ 0 & -5 & -9 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 0 & -1 \\ -4 & 2 \\ 1 & -5 \end{pmatrix} \quad \tilde{A} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -2 & 5 \end{pmatrix}$$



$$\begin{aligned} 2p-1 &= 1-p \\ 3p &= 2 \\ p &= 2/3 \\ V &= 1 - \frac{2}{3} = \frac{1}{3} \\ p^* &= \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{3} \right) \end{aligned}$$

$$K_{j1} = 2, K_{j2} = -1$$

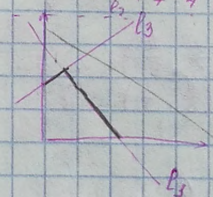
$$\begin{cases} K_1 = 2 \\ K_2 = -1 \\ K_1 q + K_2 (1-q) = 0 \end{cases}$$

$$p^* = \begin{pmatrix} 2/3 & 1/3 \\ 1/3 & 2/3 \end{pmatrix}, q^* = \begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 2/3 & 1/3 \end{pmatrix}, V = \frac{1}{3}$$

$$\text{Hilfsproblem: } -\frac{1}{3} \cdot 0 + 0 \cdot 0; \frac{1}{3} \cdot \frac{2}{3}, 0, 0 \quad \left(-\frac{1}{3}; -\frac{1}{3} \right)$$

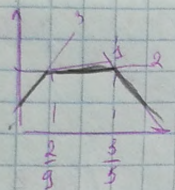
$$\begin{aligned} \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) &= \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) \\ \min_{y \in Y} K(x, y) &\leq K(x, y) \\ \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) &\leq \max_{x \in X} K(x, y) \\ \max_{x \in X} \min_{y \in Y} K(x, y) &\leq \min_{y \in Y} \max_{x \in X} K(x, y) \end{aligned}$$

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 1 & 4 & 2 \end{pmatrix} \quad L_1 = 8-5p+7, L_2 = 4, L_3 = 9p+d$$



$$\begin{aligned} -6p+7-8p &= 2 \\ 5 &= 14p \Rightarrow p = \frac{5}{14} \\ p^* &= \begin{pmatrix} 5/14 & 9/14 \\ 9/14 & 5/14 \end{pmatrix} \\ V &= 7 - \frac{5}{14} = \frac{79}{14} = 5 \frac{9}{14} \\ q^* &= \begin{pmatrix} 9/14 & 0 \\ 0 & 5/14 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$\text{Hilfsproblem: } \begin{pmatrix} 9/14 & 0 \\ 0 & 5/14 \end{pmatrix}, V = 5 \frac{9}{14}$$



дв.т.: $p^* = (p, 1-p)$ $p \in [\frac{2}{3}, \frac{3}{5}]$
 $V=4$ ← равно количеству
 $K_1=9, K_2=0$
 $q^* = (0, 1, 0)$

дв.т. $A = \begin{pmatrix} 2 & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$

В.к.ч. — невр. под-матр. Если найти
 значение p , то оно даст
 соответ. крайнему ряду

Или макс. кр. т.

1. перед. все невр. кр. под-матр.
2. найти простое решение
3. убедиться, что решение

Нет ерр. $\Rightarrow$ и вычитаем 1×1

1. $B = \begin{pmatrix} 2 & 4 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$B^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^{-1}B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$V = \frac{1}{\frac{1}{3} + \frac{1}{3}} = \frac{3}{2}$

$p^* = \frac{1}{3} (1, -\frac{1}{3}) = (\frac{1}{3}, -\frac{1}{9})$

$q^* = \frac{1}{3} (\frac{1}{3}, \frac{2}{3}) = (\frac{1}{9}, \frac{2}{9})$

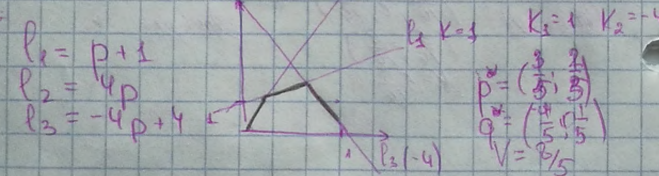
2. $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ $B^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1/2 & -2 \\ 0 & 1 & -1/4 & 1/2 \end{pmatrix}$

$C = \begin{pmatrix} 1/2 & 0 \\ -1/2 & 1/4 \end{pmatrix}$ $V(C) = \frac{3}{5}$ $p^* = (\frac{3}{5}, \frac{2}{5})$ на ерр.
 $q^* = (\frac{4}{5}, \frac{1}{5})$ $(\frac{4}{5}, 0, \frac{1}{5})$

3. $D = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 4 \end{pmatrix}$ $D^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1/4 \end{pmatrix}$

$V = 2$ макс., т.к. b и 2 уже совпадают.

Граф. метод:



Ф.1 Принцип максимума
 $V = \max_{i=1, \dots, n} \min_{j=1, \dots, n} (A_{ij})$ ($A_{ij} > 0, i=1, \dots, n$)
 $\sum_{i=1}^n \lambda_i = 1$ $Q(\lambda_i)$
 $Q_i(0) = 0, i=1, \dots, n$

Пусть решение существует $\lambda_i^0 W_i = \lambda_n^0 W_n, i=1, \dots, n-1$
 $\Rightarrow \lambda_i^0 = \frac{\lambda_n^0 W_n}{W_i}, i=1, \dots, n$

$\sum_{i=1}^n \lambda_i^0 = 1 \Rightarrow \lambda_n^0 W_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{W_i} = 1$
 $\lambda_n^0 = \frac{1}{W_n \sum_{i=1}^n \frac{1}{W_i}}$

$\Rightarrow \lambda_i^0 = \frac{1}{W_i \sum_{i=1}^n \frac{1}{W_i}}$ — это значение макс. функции W_i

$V = \frac{1}{\sum_{i=1}^n \frac{1}{W_i}}$

Ф.2 Найти опт. раз.

$\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$

нет опт. раз.

$(1, 1)$ и $(1, 1)$ — если кто-то откл. $\Rightarrow$ опт. раз. больше

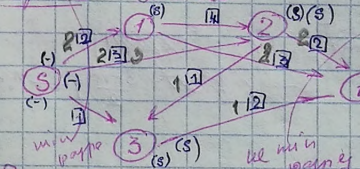
Ф.3

$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ $\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

$(1, 1)$ и $(2, 2)$

Или $\rightarrow$ Или

Ф.4



Найти макс. поток
 Если нет, то найти мин. поток

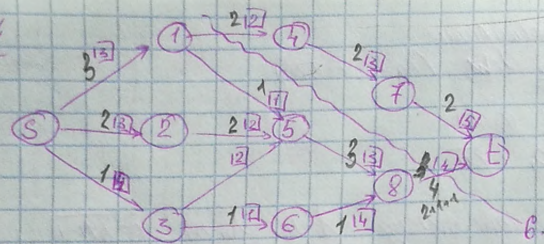
1) $S - T - Z$	2
2) $S - T - Z$	2
3) $S - T - Z - T$	1
4) $S - T - Z$	1

6 — величина макс. потока

$\max \pi(A) = 6$

Т.е. велич. макс. потока = велич. мин. разреза
 Смысл: если $S \rightarrow T$

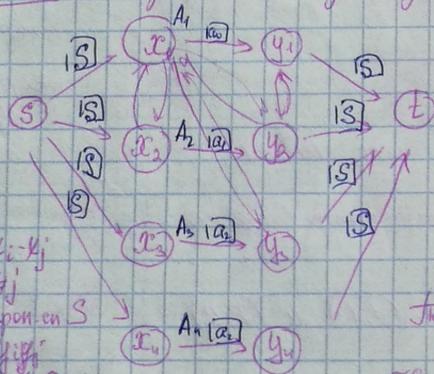
Зад. 4



S-1-4-7-10	2
S-2-5-8-10	2
S-1-5-8-10	1
S-3-6-8-10	1
	6

попу: S, 1, 2, 3, 5, 6, 8 / 4, 7, 10

Зад. 5 Программы на бинарных алфавитах



группы: x_i, y_j
 $i, j \in \{1, 2, 3, 4\}$
 S — источник
 T — приемник

попу. ед. ед. ед.

$$u(A_1) = a_0 = 1$$

$$u(A_2) = a_1 = \frac{1}{2} < 1$$

$$u(A_3) = u(A_4) = a_2$$

$$a_{n+2} = a_n - a_{n+1}$$

$$n = 0, 1, 2, \dots$$

Тождество, что $a_i = \sigma^i$
 индукцией

$$\sigma^0 = 1$$

$$\sigma^1 = \sigma$$

$$a_{n+2} = \sigma^n - \sigma^{n+1} = \sigma^n (1 - \sigma) = \sigma^n (1 - \frac{1}{2}) = \sigma^n \cdot \frac{1}{2}$$

$$= \sigma^n \cdot \frac{1}{2}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma^n = S$$

Матр.	Усл. нумер.	δ	A_1	A_2	A_3	A_4
0	S-x ₁ -y ₁ -t	a_0	0	a_1	a_2	a_2
n-1			0	a_n	a_{n+1}	a_{n+2}
n(a)	S-x ₂ -y ₂ -x ₃ -y ₃ -t	a_{n+2}	0	a_{n+2}	0	a_{n+3}
n(b)	S-x ₂ -y ₂ -x ₄ -y ₄ -t	a_{n+2}	a_{n+2}	0	a_{n+2}	a_{n+3}
8	y ₂ -x ₃ -y ₄ -t					

Т.е. на каждом этапе, анал. n-1

$$M(A)$$

$$n+1(S)$$

$$a_{n+2}$$

$$a_{n+3}$$

$$a_{n+2}$$

$$a_{n+3}$$

$$0$$

$$a_{n+3}$$

$$a_{n+2}$$

$$a_{n+3}$$

$$0$$

$$a_{n+3}$$

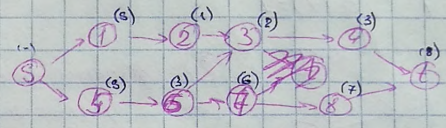
$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = S$$

$$\sum S = a_0 + (a_1 + a_2) + (a_3 + a_4) + \dots + (a_{n-1} + a_n) + (a_n + a_{n+1}) + \dots =$$

$$= a_0 + a_1 + \dots = S$$

$$\max H(f) = 4.5$$

Зад. 6



$$u_{ij} = 1$$

$$u_{12} = 1$$

$$u_{23} = 1$$

$$u_{34} = 1$$

$$u_{45} = 1$$

$$u_{56} = 1$$

$$u_{67} = 1$$

$$u_{78} = 1$$

$$u_{89} = 1$$

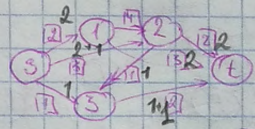
$$u_{910} = 1$$

Итого: если по 100, 3-6 единица $\Rightarrow$ 1000 итер, если игри через дугу (3, 6)

$$O(mn)$$

попу. ед. — здесь это и получается — 200 итер. вместо 20

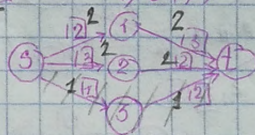
Зад. 1



$$I_{n+1}(f) = 6$$

$$u_{ij} = 0$$

$$13.10$$



$$a(3) = 6$$

$$a(1) = 2$$

$$a(2) = 2$$

$$a(3) = 1$$

$$a(4) = 7$$

$$a(1) = 2$$

$$a(2) = 2$$

$$a(3) = 1$$

$$a(4) = 7$$

$$a(1) = 2$$

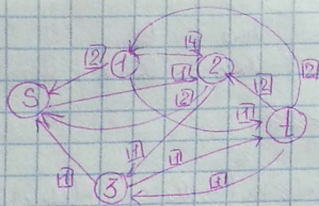
$$a(2) = 2$$

$$a(3) = 1$$

$$a(4) = 7$$

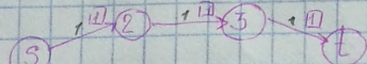
6 чл. потока при шибн. ориент. — чл. потока

Этап 2) $G^*(f)$



3) $S-2-3-t$

4) $G^*(f)$

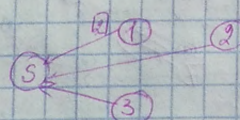


умножить на 1
пути увелич.

5) $a(s)=1$ $a(3)=1$
 $a(2)=1$ $a(t)=1$

Этап 3)

а) $G(f)$



дальше по стр-м
прямого пути из S к t
→ STOP.

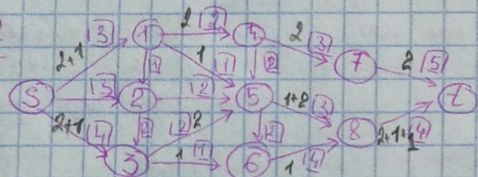
Найд. поток абн. максимальным

Мин. разреж:

$V_0 = \{s\}$
 $V_0 = \{s, 1, 2, 3, t\}$

$u(V_0, \bar{V}_0) = 6$

Этап 2)



1) $f_{ij} = 0$

Этап 2: 2) $G(f) = 6$

3) $S-1-2-3-t$

4) $G^*(f)$

5) $a(s)=10$

$a(t)=3$

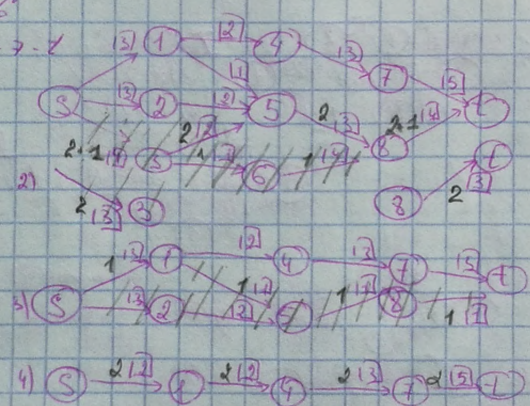
$a(2)=2$

1) $a(3)=1$

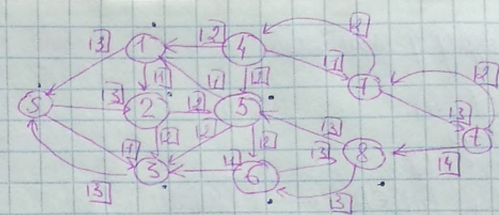
2) $a(3)=2$

3) $a(2)=1$

4) $a(t)=2$



Этап 1) 2) $G(f)$



3) нет прямого пути

$M(f) = 6$

$V_0 = \{s, 1, 2, 3, 5, 6, 8\}$
 $\bar{V}_0 = \{4, 7, 9\}$

$u(V_0, \bar{V}_0) = 6$

Прим. Транспортная задача

Пар. (англ.)

мат. (математическая)

i : a_i - предложение

j : b_j - спрос

матрица трансп. затрат c_{ij}

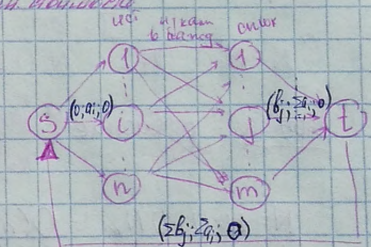
$\sum_{i=1}^n a_i \geq \sum_{j=1}^m b_j$

мин. $\sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m c_{ij} f_{ij}$

огр. $\sum_{j=1}^m f_{ij} \leq a_i, i=1, n$

$\sum_{i=1}^n f_{ij} \geq b_j, j=1, m$

$(0, a_i, c_{ij})$



Прим. Задача о назначениях

n рабочих

n работ мест

d_{ij} - зар-плата на j -ом месте

макс. эффективнее

это ТЗ при $m=n, a_i=1, b_j=1$

$c_{ij} = -d_{ij}$

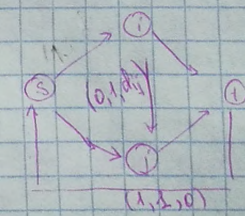
Прим. Задача о кратчайших путях

$G=(V, A)$ - ориент. сеть S, t

d_{ij} - длина пути

Прим. о гравитационном пути (сорт)

$c_{ij} = -d_{ij}$



Алг. Дейкстры $O(n^2)$
или сортир. по сор.

Пробл. раскрасы у многократной

$$G = (V, A)$$

$$|V| = n$$

$$|A| = O(n^2)$$

$$u_{ij}, (i, j) \in A \rightarrow ([\log_2 u_{ij}], 1)$$

$$u = \max_{(i, j) \in A} u_{ij} \Rightarrow L = n + \lceil \log_2 u \rceil \text{ (многократная раскраса)}$$

ан. Каргенова - $O(n^2)$

$$O(n^2) \rightarrow O(n^2)$$

или можно, сур. и $p(L(I))$ т.е. $u \rightarrow \log_2 u$

т.е. ан. экспоненциальный

Ан. Д: $O(n^2)$ - минимальный

Пробл. PMPC $\in NP$

$$n, m$$

$$t_i, T$$

$$I_n, m$$

$$\Rightarrow L(I) = n + \lceil \log_2 T \rceil$$

$$N = N_1 \cap \dots \cap N_m$$

$$N_i \cap N_j = \emptyset \text{ if } i \neq j$$

$$\sum_{i \in N_j} t_i \leq T, j = 1, m$$

Пробл. - раскраска (проб. $\cap, \forall u \geq t_i$)

гн. сур. $\leq p(L)$, $O(n \log n)$ сур. минимальный

$$N = N_1 \cup \dots \cup N_m \rightarrow O(n) \text{ группа аргм.}$$

$$N_i \cap N_j = \emptyset$$

$$O(n^2)$$

берем i и m , из них $\in N = O(n^2)$

$$\sum t_i \leq T = O(n)$$

Пробл. нет раскраски $\in NP$

Пробл. 3K

Пробл. многократная раскраска

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$i: t_i, [b_i, f_i]$$

гн.и

группа $m=1$

многократная раскраска, $m=1$

$$t_i \leq f_i - b_i$$

$$F = \max_{i \in N} f_i$$

$$L(I) = n + \lceil \log_2 F \rceil$$

Примеры: $y = (t_1, \dots, t_n)$

$$Проб. \tau_i \geq b_i \quad O(n)$$

$$\tau_i + t_i \leq f_i \quad O(n)$$

$$(\tau_i, \tau_i + t_i) \cap (\tau_j, \tau_j + t_j] \neq \emptyset \text{ и прояссор}$$

$$\text{т.е. } \tau_i \geq \tau_j + t_j \text{ и } \tau_j \geq \tau_i + t_i \Rightarrow O(n^2)$$

Пробл. Вершинное покрытие

$$G = (V, A)$$

$$|V| = n$$

$$k \leq n$$

Вершинное покрытие минимально не более k

$$|V'| \leq k$$

$$V' \subseteq V: \forall (i, j) \in A - i \in V' \vee j \in V' \text{ (миним.)}$$

Это аннотация задачи

? $|V'| = k$ - фермион. отбук.

$$L(I) = n$$

(бер. и раск. $O(n^2)$ $\Rightarrow$ миним. $\Rightarrow$ бер. $\in$)

Примеры: $y = V'$ группа $O(n)$

$$Проб. (i, j) \text{ проб. конг. } O(n^2)$$

и V' -много

Пробл. Трехкратная раскраска

$$W, X, Y, |W| = |X| = |Y| = n, \text{ попарно непересекающиеся}$$

$$M \subseteq W \times X \times Y \text{ содержит ли } M^3 \text{ раскраску } M \in M, |M| = n$$

$$\forall (w_1, x_1, y_1) \in M, (w_2, x_2, y_2) \in M, w_1 \neq w_2, x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2$$

$$L(I) = n$$

Примеры: $y = M^1$ $O(n)$

Пробл. M проб. на 3^k = конг. $O(n^2)$ $3 \in M$ проб. на $n^2 \Rightarrow O(n^2)$

и бер. и отбук. $O(n^2)$

27.10 Доминирующие мн-ва DM

$$B = (V, A)$$

$$n = |V|, K \leq n$$

? Или доминирующее мн-во из K вершин

$$V' \subseteq V$$

$$K' \subseteq V \setminus V' \quad \exists j \in V' \quad (i, j) \in A$$

1. ENP брм. V'

• перед. $V \setminus V' \rightarrow$ перед. V' для поиска рёбра

$$l = n$$

~~БП~~ $B \cap DM \Rightarrow DM$

$$B = (V, A)$$

$$n = |V|$$

$$K \leq n$$

$$l = n$$

$$B = (V, A)$$

$$V = V \cup \{i, j : (i, j) \in A\}$$

$$A = A \cup \{(i, j) : (i, j) \in A\}$$

$$j \in V' \rightarrow V' \cap B \Rightarrow V' \cap B$$

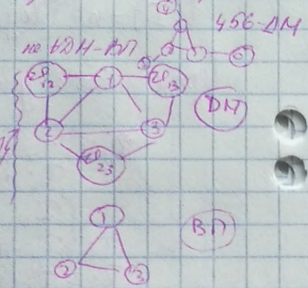
этот рёбра-акт, но не-т.к.

одно из 2-х рёбер

Вр. DM в $B - V'$

т.е. $V' \subseteq V \rightarrow$ из верш. рёбра введёт т.к. числа из рёбер по тем верш. $\Rightarrow$ БП по вер. B

д.е. $\exists j$ такое что $i \in V' \rightarrow V' \subseteq V - DM$



Или Независимое мн-во HM

$$B = (V, A)$$

$$n = |V|, K \leq n$$

? Или HM из K вершин

$$V' \subseteq V$$

$$V' \subseteq V: \forall i, j \in V' \quad i \neq j \quad (i, j) \notin A$$

$$V' = \{2, 3\}$$

$$K =$$

Упр. Проверка 3 условий эквивалентно $[B = (V, A)]$

$$1) V' - \text{БП}$$

$$2) V \setminus V' - \text{HM}$$

$$3) V \setminus V' - \text{Клика в } \bar{B} \text{ (полн. ф. } \bar{B} = V \setminus V' \quad \bar{A} = \{(i, j) : (i, j) \notin A\})$$

$$\text{Дл. } 1 \rightarrow 2 \quad \forall i, j \in V' \quad \exists j \in V' \quad (i, j) \in A \Rightarrow V' - \text{не БП}$$

$$2 \rightarrow 3$$

$$3 \rightarrow 1 \quad \text{док.}$$

2. БП $\Rightarrow$ HM из упр.

Или Управление множества YM

$$C = \{C_1, \dots, C_k\} \text{ множество непересекающихся множеств}$$

$$K \leq n$$

? Верно ли что в C имеется K непересекающихся множеств

$$1. \text{ ENP}$$

$$\text{брм. } C_1, \dots, C_k$$

• непересекающиеся

2. HM $\Rightarrow$ YM

$$B = (V, A)$$

$$n = |V|, K \leq n$$

$$C: i \in V \quad (i, j) \in A$$

$$K$$

$$j \in V' \rightarrow V' - \text{HM } B \Rightarrow i, j \in V' \Rightarrow C_i \cap C_j = \emptyset$$

Или Управление с минимальными зависимостями Y43

$$N = \{1, \dots, n\} \text{ работ}$$

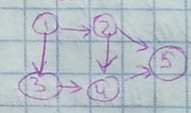
$$t_i = 1 \text{ гит}$$

$$b_i = 0$$

$$B = (N, A) \text{ опер.}$$

$$K \leq n$$

$$i \in N$$



? Или управ. ресурс. без опер. при зад. числе опер. $\leq k$

1. ENP

$$C = (C_1, \dots, C_k) - \text{брм.}$$

$$\text{мн-во } C_i \text{ и } C_j \text{ } i \neq j$$

$$\text{Или управ. число } |C_i| \text{ } i \neq j \text{ } |C_i| + |C_j| \leq k$$

2. Клика $\Rightarrow$ YM

$$N = V \cup E$$

$$H = (V, E)$$

$$J \leq n = |V|$$

$$l = n$$

$$m = |E|$$

$$K := m - J(J-1)/2$$

$$G = (N, A); \quad A = \{(i, j) : i \in V, j \in E\} \quad \forall (i, j) \in E$$

$$f_i := m + n, i \in V$$

$$f_{ij} := J(J+1)/2$$

"да" $\rightarrow$ мин. работ опер. имеет только работ $(i, j) \in E$

$$V' - \text{клика, } V \setminus V' = J$$

$$J(J+1)/2$$

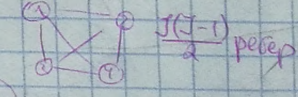
$$m - J(J-1)/2$$

$$J(J+1)/2$$

$$n - J(J-1)/2$$

$$m - J(J-1)/2$$

$$J(J+1)/2$$



или и опер. работ

"Нет" $\rightarrow$ что-то содержит $m = \frac{I(J+1)}{2} \Rightarrow$ значит $\frac{I(J+1)}{2}$ ребер,
но столько нулей ряд. у нас
но в стр. $I(J+1)$ у нас не больше J ряд. вершин,
но их $> J$ в неполном графе

Прим. Пешего

$$a_1=1, a_2=3, a_3=5, a_4=3, a_5=8$$

$$B=1+9+5+3+8=26$$

$$B/2=13$$

(1) 1 2 3 4 5 6 7 8 9 10 11 12 13

(2) 1

(3) 2 1

(4) 3 1

(5) 4 1

(6) 5

1, 9, 3: a_1, a_2, a_4

$$N' = \{a_1, a_2, a_4\} \quad N' = \{1, 2, 9\}$$

Прим. Алгоритм решения задачи Рюкзак

$$N = \{1, \dots, n\}$$

$$i \in N: w_i, s_i \quad (n \leq N)$$

$$V, S: N \subseteq N': \sum_{i \in N'} w_i \leq V, \sum_{i \in N'} s_i \geq S$$

матрица $t(i, j)$

i	1	V_1	$V_2, V_3, \dots$	V
-----	---	-------	-------------------	-----

1

2

i

$i+n$

n

вместимость стр. рюкзака
таблица

$$O(nV)$$

Зам. если $\square$ задача $\Rightarrow$ инвариант
большое число

В-м могут быть упрощены, но мы
выясним какое-нибудь решение

вариант	1	S_1	S_2	$S_3, \dots$	S
1	V_1				
2		V_2	$V_3, \dots$		

Зам. если $\square$ задача $\Rightarrow$
инвариант меньшее
число

$$O(nS)$$

Комбинир.: $?SVV \Rightarrow$ выбор алг. $\Rightarrow O(n \cdot \min(V, S))$ комбинир. алг.

17.18

Прим. РНПР для двух точек процессоров

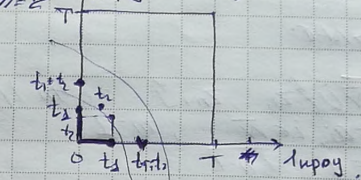
$$N = \{1, \dots, n\}$$

t_i - время

T - дур срок, $t_i \leq T$

m проц., $m = \text{const}$ (зад. число)

$$Tm = 2$$



Всего 2ⁿ вариантов для под точки - то с точками, вх.

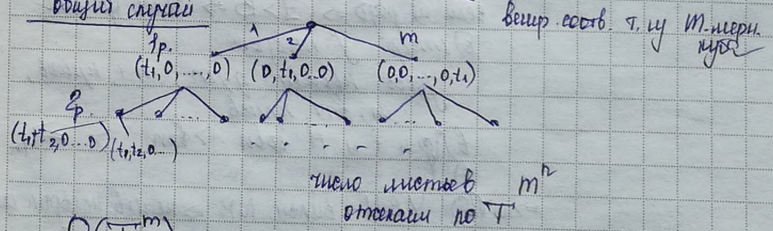
$\Rightarrow$ можно не $\leq T$, выходящие на пересечение

если на n мы есть $\Rightarrow$ внутри $\Rightarrow$ расстояние $\square$ или

расстояние стр. цел. $\square$ в квадр. - т.е. для зад. t_i время

$$\Rightarrow O(T^2)$$

$\Rightarrow$ для проц., - для проц.



$O(T^m)$ - дур способ
исходным алгоритм

17.

49

ВРО $\Rightarrow$ ~~верн~~

$N=n$

$\text{ДВН}(B, \vec{0}, \vec{0}) \quad i=n, n-1, \dots$

каждого нет $\Rightarrow$ надели L^* (или 1)

$\text{ДВН}(B, L^*, \vec{V} = \{\vec{v}_i\}, i=1, \dots, n$

если $i: g_i \Rightarrow \text{верн } i$

хотел. сл. $n-1$ вер.

$\text{ДВН}(B, L^*, \vec{V} = \{\vec{v}_i, \vec{v}_{i+1}\})$

$n-2$ вер.

L^* и т.д.

ф.о.д. $n \Rightarrow$ ВРО-матри.

Форм. 3-C

$X \times Y \times Z$

$|X|=|Y|=|Z|$

попарно непер.

$W \subseteq X \times Y \times Z$

? $W \subseteq W: |W|=n$

кажд. м. в тр.

т.е. $(x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2) \in W$

$x_1 \neq x_2, y_1 \neq y_2, z_1 \neq z_2$

? $3-C \Rightarrow 3-CO$

$\text{ДЗ-C} (-, -, \text{н. или трое, } \text{коп} \subseteq N)$

? $\exists W$ вкл. экз. и уф. чл. f .

$\text{ДЗ-C} \Rightarrow 3-C$ т.е. они не-квали

$\text{ДЗ-C} \Rightarrow 3-C$

? $3-CO \Rightarrow \text{ДЗ-C}$

$\text{ДЗ-C} (-, -, \emptyset) \Rightarrow g_0$

нет $\Rightarrow$ один

$g_0 \Rightarrow \text{ДЗ}(\dots, (x, y, z))$ для кажд. тройки n вер.

(x_i, y_i, z_i)

2. $\text{ДЗ-C}(-, -, (x_i, y_i, z_i) \cup (x, y, z)) \quad (n-1) \quad (n^3-1)$
 $\sim O(n^4)$

Показатель $\Pi \Rightarrow \Pi' \Rightarrow \Pi \Rightarrow \neg \Pi'$

$\exists f: D_n \rightarrow D_n: 1)$ симметрия стр.

$f(y \in Y_n) \in Y_n$

$f(y \in H_n) \in H_n$

2) вкл. поименованию

$I \in \Pi \quad f(I) \rightarrow I'$ реш. $A' \Rightarrow$ симм. стр. $\Rightarrow$ полн. стр.

Обратное имев ($\Pi' \Rightarrow \neg \Pi' \Rightarrow \Pi \Rightarrow \Pi'$)